



CH.0 bis : ANALYSE EN SERIE DE FOURIER

Plan (Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)

\*\*\*\*\*
CH.0 bis : ANALYSE EN SERIE DE FOURIER 1
I. THEOREME DE FOURIER 1
II. THEOREME DE PARSEVAL 1
III. ROLE DES SYMETRIES 2
III.1. SYMETRIE DE GLISSEMENT 2
III.2. FONCTION IMPAIRE 2
III.3. FONCTION PAIRE 2
IV. EXEMPLES 2
IV.1. SIGNAL CARRE 2
IV.2. SIGNAL TRIANGULAIRE 3
\*\*\*\*\*

I. THEOREME DE FOURIER

- Soit f(t) une fonction réelle ou complexe de la variable réelle t, fonction périodique de période T = 2π/ω, présentant sur l'intervalle [-T/2, T/2] un nombre fini de discontinuités, de maximums et de minimums, et telle que ∫\_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt ait une valeur finie.
• On peut alors « décomposer f(t) en série de Fourier », c'est-à-dire écrire :

f(t) = a\_0/2 + sum\_{n=1}^{inf} [a\_n cos(nωt) + b\_n sin(nωt)] avec :
a\_n = 2/T ∫\_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(nωt) dt
b\_n = 2/T ∫\_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(nωt) dt

Rq : le terme a\_0/2 représente la valeur moyenne de f(t).

II. THEOREME DE PARSEVAL

• On montre que : 1/T ∫\_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = a\_0^2/4 + 1/2 \* sum\_{n=1}^{inf} (a\_n^2 + b\_n^2)

- Le théorème de Parseval exprime la façon dont l'énergie (carré du module de f(t)), associée au phénomène périodique décrit par f(t), se « répartit » entre les différents harmoniques (caractérisés par leurs coefficients a\_n et b\_n).
• Si f(t) est une fonction réelle, par exemple l'intensité i(t) d'un courant de valeur moyenne nulle (grandeur alternative), le théorème de Parseval montre que le carré de la valeur efficace de i(t) est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces des différents harmoniques.

### III. ROLE DES SYMÉTRIES

#### III.1. SYMÉTRIE DE GLISSEMENT

- Considérons une fonction  $f(t)$  telle que :  $f(t+T/2) = -f(t)$   
(l'alternance négative est identique, au signe près, à l'alternance positive)

- Alors :  $a_0 = 0$  ; il n'y a pas d'harmonique de rang pair, et  
$$a_{2k+1} = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} f(t) \cos[(2k+1)\omega t] dt ; \quad b_{2k+1} = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} f(t) \sin[(2k+1)\omega t] dt$$

#### III.2. FONCTION IMPAIRE

Soit  $f(t)$  telle que  $f(t) = -f(-t)$  ; alors :

$$a_0 = 0 ; \text{ les termes en cosinus disparaissent}$$

$$b_n = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

#### III.3. FONCTION PAIRE

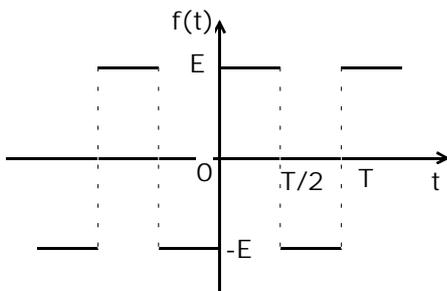
Soit  $f(t)$  telle que  $f(t) = f(-t)$  ; alors :

$$\text{les termes en sinus disparaissent}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

### IV. EXEMPLES

#### IV.1. SIGNAL CARRÉ



Le signal présente la symétrie de glissement et est impair: dans le développement en série de Fourier, il ne reste que des termes en  $b_{2k+1}$

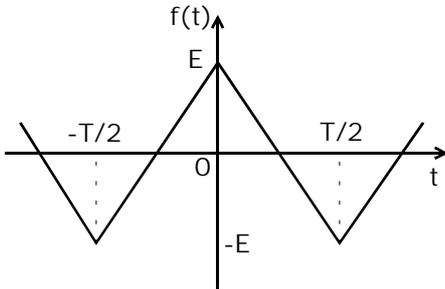
On pose le calcul : 
$$b_{2k+1} = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} E \sin[(2k+1)\omega t] dt = -\frac{4E}{T(2k+1)\omega} [\cos(2k+1)\omega t]_0^{T/2}$$

Or :  $\omega T = 2\pi \Rightarrow \cos[(2k+1)\omega T/2] = \cos[(2k+1)\pi] = -1 \Rightarrow$  on obtient finalement :

$$b_{2k+1} = \frac{4E}{(2k+1)\pi} \quad (k \in \mathbb{N})$$

**Rq :** la valeur moyenne du signal carré précédent est évidemment nulle (l'aire positive est égale à l'aire négative).

## IV.2. SIGNAL TRIANGULAIRE



On a cette fois une symétrie de glissement et la fonction est paire; après calculs, il vient:

$$a_{2k+1} = \frac{8E}{\pi^2 (2k+1)^2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

**Rq1** : lorsqu'on essaie de reconstituer une fonction  $f(t)$  à l'aide du **même nombre fini de termes**, on constate que la reconstitution est plus « fidèle » pour le signal triangulaire que pour le signal carré (pour le triangle, les coefficients du développement de Fourier décroissent en  $1/(2k+1)^2$ , donc plus vite que les coefficients du signal carré, qui décroissent en  $1/2k+1$ ).

**Rq2** : de manière générale, les signaux comportant des transitions « brutales » (comme le signal carré) sont plus difficiles à reconstituer ; ils sont également plus difficiles à filtrer, car plus « riches » en harmoniques.

\*\*\*\*\*